* on a : $\forall t \in [Log2,+\infty[: f(t) \le 2t^2 e^{-t}$ donc $\forall x > Log2$:

$$\int_{Log2}^{x} f(t)dt \le 2\int_{Log2}^{x} t^2 e^{-t} = 2G(x)$$

* D'autre part en utilisant la relation de chasle sur les intégrales on obtient :

$$F(x) = \int_0^{Log2} f(t)dt + \int_{Log2}^{x} f(t)dt = F(Log2) + 2G(x)$$

or $G(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ donc il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+ : 2G(x) \le k$ .Il en résulte que :

* pour $x \le Log2$; $F(x) \le F(Log2)$ (car F est croissante sur $\mathbf{R}_+$)

* pour $x > Log2$; $F(x) \le F(Log2) + k$

Il suffit de prendre $M = F(Log2) + k > 0$

d) on a $\forall x \in \mathbf{R}_+ : F(x) \le M$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \le M$

B - 1°/ a) Pour tout réel $x > 0$ le réel : $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx}$ est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme e^{-x} et de raison $e^{-x} \neq 1$.

donc $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx} = e^{-x}\dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-nx}}{e^{x}-1}$

d'où $\dfrac{1}{e^{x}-1} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx} + \dfrac{e^{-nx}}{e^{x}-1}$

b) D'après le tableau des variations de f on a :

$\forall x \in \mathbf{R}_+ \ 0 \le f(t) \le a(2-a) \Rightarrow 0 \le f(t)e^{-nt} \le a(2-a)e^{-nt}$

En intégrant sur $[0,x]$ on obtient :

$$0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le a(2-a)\int_0^x e^{-nt}dt$$

or $\displaystyle\int_0^x e^{-nt}dt = \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^x = \frac{e^{-nx}-1}{-n} = \frac{1-e^{-nx}}{n}$

de plus $\forall x \in \mathbf{R}_+ : \dfrac{1-e^{-nx}}{n} \le \dfrac{1}{n}$ et par suite : $0 \le \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le \frac{a(2-a)}{n}$

c) Faisons une intégration par parties :